Sistemi Dinamici e Meccanica Classica
A/A 2008—2009.
Alcuni Esercizi

G.Falqui, P. Lorenzoni,
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano–Bicocca.

Versione del 23 Dicembre 2008 con esercizi aggiuntivi. Commenti e correzioni sono benvenuti. Gli esercizi sono tratti da vari libri e/o documenti sul web e/o altro.

1 Sistemi Dinamici

1.1

Un punto materiale si muove sulla retta x soggetto ad una forza

$$F = (2a\,x - 4\,bx^3)\mathbf{i},$$

con i parametri $a, b > 0$. Discutere qualitativamente il moto. Calcolare il limite dei periodi dei moti oscillatori sia per $E \to E_{\min}$ (E è l'energia del punto materiale, normalizzata come $E(0) = 0$), che per $E \to 0$.

Dare una stima del periodo per $E = \dfrac{-a^2}{8b}$.

1.2

Un punto materiale si muove su una retta soggetto ad una forza di energia potenziale $U(x) = (x^2 - 1)(x - 2)^2$.

Tracciare le curve di fase al variare dell'energia.

Trovare le tangenti alla separatrice nel punto di equilibrio instabile del sistema.

Calcolare il periodo dei moti non stazionari per $E = 0$

1.3

Si consideri il sistema dinamico nel piano (x, y) definito da:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + a\,x \\ \dot{y} &= 3\,x^2 - 1 - b\,y \text{ con } a, b > 0. \end{cases}$$

Verificare che per $a = b = 0$ il sistema è conservativo.

Nel caso $a = b = 0$, trovare un dato iniziale per cui l'orbita sia chiusa e stimarne il periodo.

Verificare che per $a = b$ il sistema è ancora conservativo e trovare la costante del moto; studiare qualitativamente questo sistema (suggerimento: si operi il cambio di variabili $x = x, z = y + a\,x$).

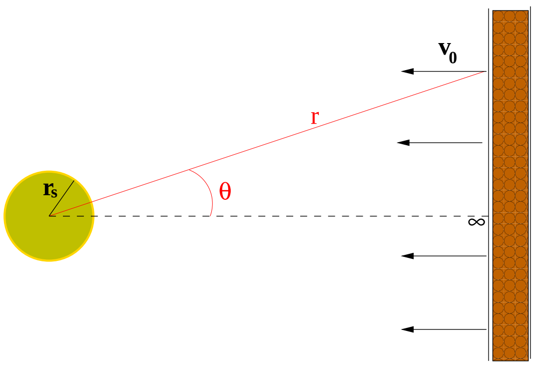
Verificare che per $a \geq b$ il sistema ammette un punto di equilibrio stabile con il metodo di Lyapunov.

2 Meccanica dei punti materiali

2.1

Consideriamo uno sciame di asteroidi che si arrivano dall'infinito (vedi figura 2.1) sul piano xy, con velocità iniziale $-v_0\mathbf{i}$ verso un stella S di raggio r_S. Determinare quanti asteroidi cadono, nell'unità di tempo, su S, supponendo che, per $x \to \infty$, la densità degli asteroidi sia $\dfrac{\delta m}{\delta \sigma} = \rho$, con ρ costante. Studiare lo stesso problema nello spazio.

Figure 1: Lo sciame di asteroidi



2.2

Determinare le equazione del moto di una particella di massa unitaria che si muove, vincolata alla parete di un cilindro verticale di raggio R con asse coincidente con l'asse z, attratta da una forza elastica al punto O dell'asse del cilindro.

Si faccia lo stesso considerando la particella vincolata a stare sull'iperboloide di rotazione definito dall'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

2.3

Si consideri un sistema formato da due masse m_1 ed m_2 collegate da una sbarra s di massa trascurabile e lunghezza l; m_1 è vincolata a stare sull'asse x, e m_2 nel piano verticale. Si determinino le equazioni del moto del sistema, e la reazione vincolare che agisce su m_1.

2.4

Un punto materiale P, di massa m, è appoggiato ad una guida posta in un piano verticale, con la concavità rivolta verso il basso. Sia

$$f(x, y) = 0$$

l'equazione della guida (y verticale discendente). Ammettiamo che nel tratto di curva che si considera $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{y}} > 0$. Sapendo che P è lanciato dalla posizione (x_0, y_0) con velocità $\mathbf{v}_0$ tangente alla guida diretta verso il basso, determinare il punto di distacco dalla guida. Si supponga il vincolo liscio.

2.5

Si studi che coppia si deve applicare ai pedali di una bicicletta – con raggio della ruota pari a R, del rocchetto c e della moltiplica μ – che si muove su un piano inclinato di angolo α, affinché la velocità sia costante. Si può assumere che la massa del rocchetto e della moltiplica siano trascurabili. Si supponga che la massa della ruota sia m e quella del telaio (più il ciclista) sia M.

2.6

Si consideri un pendolo di massa unitaria e lunghezza l nello spazio, (con punto fisso nell'origine), attratto da una forza elastica diretta come la congiungente il punto all'asse z, di costante elastica k.

Si determinino le equazioni del moto, ed i punti di equilibrio. Si studi qualitativamente il moto "azimutale".

Si ponga ora $k = 0$, e si supponga che il pendolo sia vincolato a stare su un piano verticale liscio che ruota intorno all'asse z con velocità angolare costante Ω. Scriverne le equazioni del moto e studiare qualitativamente il sistema al variare del parametro $\eta = \frac{\Omega^2 l}{g}$.

2.7

Si studino le equazioni del moto di una particella di massa M vincolata a muoversi sulla (superfice di una) sfera di raggio R, liscia e fissa, sotto l'azione del peso.

Per quale velocità iniziale la particella si muove sul parallelo di colatitudine $\frac{3}{4}\pi$?

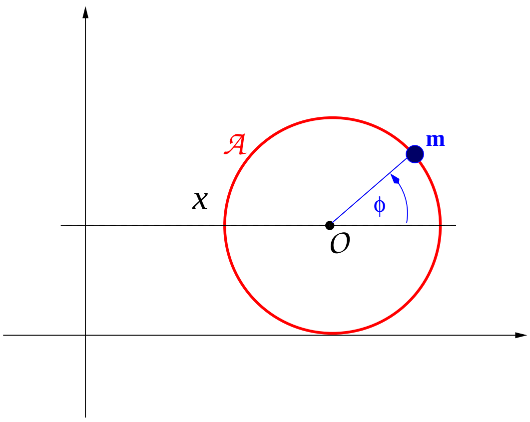
Determinare, in questo caso, la reazione vincolare.

3 Meccanica di sistemi "articolati"

3.1

Si consideri un sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi su un anello $\mathcal{A}$ di raggio R e massa M. Tale anello è, a sua volta, vincolato a ruotare senza strisciare sull'asse x. Tutto il sistema è vincolato a stare nel piano verticale (si veda la figura 3.1). Si studi il moto, si determinino le posizioni di equilibrio.

Figure 2: L'anello e il punto pesante.



3.2

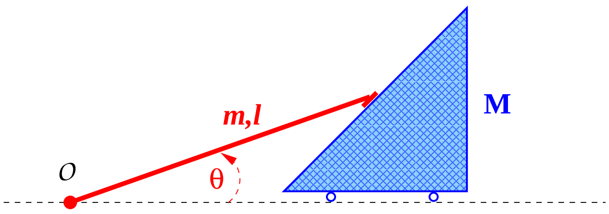
In un piano verticale un'asta omogenea di massa m e lunghezza l, ha l'estremo O scorrevole lungo una guida orrizontale liscia. Supposto che l'asta si trovi inizialmente in posizione verticale discendente e denotato con θ l'angolo formato

dall'asta con l'asse verticale, determinare in funzione di θ il valore del momento della coppia da applicare all'asta affinché la sua velocità angolare ω sia costante durante il moto.

3.3

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l è inizialmente appoggiata in quiete su una lamina triangolare di massa M. La lamina, posta in un piano verticale, poggia su una guida orrizontale (vedi figura 3.3). L'asta è incernierata a un punto O della guida orrizontale. Determinare la velocità della lamina quando l'asta diventa orrizontale.

Figure 3: Asta e lamina triangolare



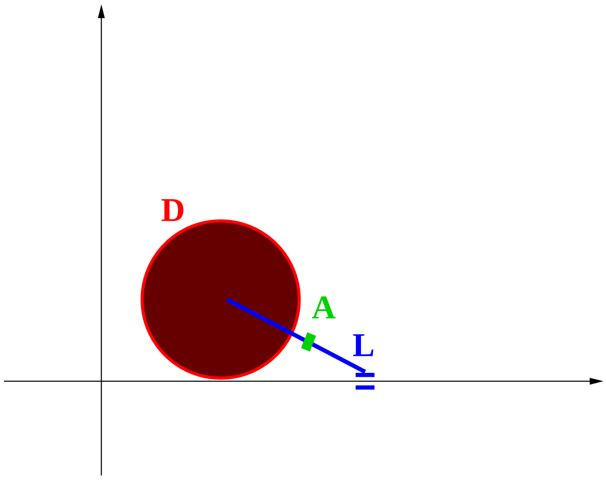
3.4

In un piano verticale un disco D di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una guida orrizontale. Un'asta L di massa M e lunghezza $2R$ ha un estremità vincolata al centro del disco e un'estremità che scorre lungo la guida orrizontale. Un anellino a di massa $\frac{M}{2}$ scorre sull'asta. Risolvere le equazioni del moto sapendo che all'istante iniziale il sistema è in quiete con l'anellino posto nell'estremo dell'asta fissato al centro del disco.

3.5

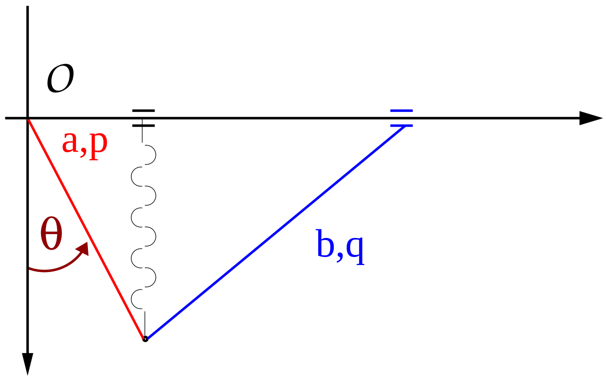
In un piano verticale sono collocate due aste. La prima di peso p e lunghezza a ruota attorno ad un suo estremo O e ha l'altro estremo collegato ad un estremo di una seconda asta di lunghezza $b > a$ e peso q. L'altro estremo della seconda asta scorre lungo una guida posta alla stessa quota di O. Una molla di costante elastica k collega il punto D di giunzione tra le due aste con un manicotto scorrevole lungo la guida. Utilizzando come coordinata libera l'angolo θ tra la prima asta e l'asse verticale passante per O si determino le posizioni di equlibrio,

Figure 4: Anello, Disco e asta (Es.3.4)



se ne studi la stabilità in funzione del valore del parametro $\mu = \frac{p+q}{2ka}$ e, nell'ipotesi $\mu > 1$ si mostri che la frequenza delle piccole oscillazioni vicino alla posizione di equibrio stabile è pari a $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{a}{g}\frac{p+q-2ka}{p+3q}}$.

Figure 5: Le due aste



3.6

Un'asta di lunghezza $2L$ e massa M ha un estremo libero di scorrere sull'asse verticale z. Il piede dell'asta è vincolato a stare sul piano (x, y). L'asta è anche attratta dall'asse z con una forza elastica di intensità pari a $k\,d$, dove d è la

distanza del suo piede dall'asse z. Tutti i vincoli sono lisci.

1. Trovare le costanti del moto.
2. Verificare che lo studio del moto può essere ricondotto ad un problema monodimensionale, e studiare tale problema.
3. Si supponga ora che l'asta sia vincolata a stare su un piano verticale π passante per l'asse z, che ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse. Studiare il sistema monodimensionale risultante. Determinare infine la potenza erogata dal motore che fa girare il piano π.

4 Meccanica Hamitoniana

4.1

Scrivere l' Hamiltoniana e le equazioni canoniche di un punto materiale nello spazio libero in coordinate

1. Cartesiane;
2. Cilindriche;
3. Sferiche.

4.2

Scrivere la Lagrangiana, le equazioni di Eulero Lagrange, la Hamiltoniana e le equazioni canoniche di un punto materiale in un campo di forze centrali.

Scrivere la Lagrangiana, le equazioni di Eulero Lagrange, la Hamiltoniana e le equazioni canoniche di un punto materiale in un campo di forze dirette verso un asse fisso.

4.3

Scrivere Hamiltoniana ed equazioni canoniche dei sistemi degli esercizi 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 3.1, 3.4, 3.6 della Sezione 3.